

Екінші ретті екі айнымалы дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің типін анықтау — бұл теңдеуді оның коэффициенттері арқылы эллипстік, параболалық немесе гиперболалық түрлердің қайсысына жататынын табу әдісі.

♦ 1. Жалпы түрі

Екінші ретті екі айнымалы x, y функциясы $u(x, y)$ үшін теңдеу жалпы түрде жазылады:

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y)$$

Мұндағы:

- A, B, C, D, E, F, G — берілген коэффициенттер функциялары,
- u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} — u -дың екінші ретті дербес туындылары.

♦ 2. Теңдеу типін анықтау шарты

Теңдеудің типі дискриминант арқылы анықталады:

$$\Delta = B^2 - AC$$

Теңдеу типі	Шарт	Мысал	Физикалық мағына
Эллипстік	$B^2 - AC < 0$	$u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Лаплас теңдеуі)	Тұрақты күй процестері (жылу, потенциал)
Параболалық	$B^2 - AC = 0$	$u_t = ku_{xx}$ (Жылу теңдеуі)	Диффузиялық процестер
Гиперболалық	$B^2 - AC > 0$	$u_{tt} = c^2 u_{xx}$ (Толқын теңдеуі)	Толқындық процестер

♦ 3. Теңдеудің типін табу мысалдары

Мысал 1.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Мұнда $A = 1, B = 0, C = 1$.

$$\Delta = B^2 - AC = 0^2 - (1)(1) = -1 < 0$$

➡ Эллипстік теңдеу.

Мысал 2.

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

$$A = 1, B = 0, C = -1.$$

$$\Delta = 0^2 - (1)(-1) = 1 > 0$$

→ Гиперболалық теңдеу.

Мысал 3.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

$$A = 1, B = 1, C = 1.$$

$$\Delta = B^2 - AC = 1^2 - (1)(1) = 0$$

→ Параболалық теңдеу.

♦ 4. Геометриялық мағына

Теңдеу типі — оның сипаттамалық сызықтарының табиғатын көрсетеді:

- Эллипстік: нақты сипаттамалары жоқ → шешімдері тегіс, тұрақты.
 - Гиперболалық: нақты сипаттамалық бағыттар бар → толқын тәрізді шешімдер.
 - Параболалық: бір ғана сипаттамалық бағыт бар → диффузиялық процесс.
-

♦ Қорытынды

Екінші ретті екі айнымалы теңдеудің типі:

$$\Delta = B^2 - AC$$

мәнінің таңбасына тәуелді:

- $\Delta < 0$ → эллипстік
 - $\Delta = 0$ → параболалық
 - $\Delta > 0$ → гиперболалық
-

♦ 1. Жалпы түрі

Екінші ретті екі айнымалы теңдеу:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

мұндағы A, B, C, D, E, F, G — белгілі функциялар.

♦ 2. Канондық түрге келтіру идеясы

Мақсат — жаңа айнымалылар енгізу арқылы теңдеудегі аралас туынды u_{xy} -ны жою:

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

Жаңа айнымалыларда теңдеу тек $u_{\xi\xi}$ және $u_{\eta\eta}$ арқылы жазылады.

♦ 3. Сипаттамалық теңдеу

Канондық түрге көшу үшін келесі квадрат теңдеуді құрамыз:

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C = 0$$

Бұл — сипаттамалық теңдеу.

Оның түбірлері:

$$\lambda_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

Осы λ_1, λ_2 мәндерге сәйкес сипаттамалық бағыттар табылады.

♦ 4. Теңдеудің типіне байланысты канондық түрлері

Теңдеу типі	Шарт	Канондық түрі	Мысал
Эллипстік	$B^2 - AC < 0$	$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$	Лаплас теңдеуі
Параболалық	$B^2 - AC = 0$	$u_{\xi\xi} = u_{\eta}$	Жылу теңдеуі
Гиперболалық	$B^2 - AC > 0$	$u_{\xi\eta} = 0$	Толқын теңдеуі

◆ 5. Мысалдар

Мысал 1.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

Мұнда $A = 1, B = 1, C = 1$.

Сипаттамалық теңдеу:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$$

→ бір ғана түбір → парабодалық теңдеу.

Жаңа айнымалылар таңдаймыз:

$$\xi = x + y, \quad \eta = x$$

Осы түрлендіруден кейін теңдеу канондық түрде жазылады:

$$u_{\xi\xi} = 0$$

Мысал 2.

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

$A = 1, B = 0, C = -1$.

Сипаттамалық теңдеу:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm 1$$

Жаңа айнымалылар:

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y$$

Сонда:

$$u_{xx} - u_{yy} = 4u_{\xi\eta}$$

немесе

$$u_{\xi\eta} = 0$$

Бұл — гипербодалық теңдеудің канондық түрі.

Мысал 3.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$A = 1, B = 0, C = 1.$

Сипаттамалық теңдеу:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

Түбірлері комплекс:

$$\frac{dy}{dx} = \pm i$$

→ Эллипстік теңдеу.

Канондық түрі:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$$

◆ 6. Қорытынды

Типі	Шарт	Канондық түрі
Эллипстік	$B^2 - AC < 0$	$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$
Параболалық	$B^2 - AC = 0$	$u_{\xi\xi} = u_{\eta}$
Гипербоалық	$B^2 - AC > 0$	$u_{\xi\eta} = 0$